

基于排队论的火车票购票网站优化

摘要：春运期间火车票购票网站需求激增，为了能够更好的解决网上订票中出现的问题，我们对现有的资料进行了分析并对火车票购票网站进行了深入的了解，统计在 Alexa 里记录的 2018 年春运期间网站访问量的数据，并考虑现行分时策略的影响，以统计的网站访问 PV 量作为网站订票请求量，每个服务器都能够处理大量的订票请求量，研究表明客户等待时间不超过 15% 时满意度较高我们需要考虑现有的三台服务器（将服务器数量看成队列）能否让客户等待的概率不超过 15%，同时需要满足使系统中的个体不超过两人，等候线的平均时间不超过 0.5，系统平均逗留时间不超过 0.5，如果达不到要求改增加一台服务器能否满足管理者需求，我们先对进入系统购票的人数进行卡方检验，发现购票人数符合泊松分布，接着我们建立了 $M/M/C/\infty/\infty/FCFS$ 排队论模型，最后计算出了系统中有 n 位顾客的概率，判断是否达到要求。

关键词：排队论，服务效率，线上购票，优化

1. 引言

火车，是人们出行的重要的交通工具之一。尤其在节假日，购买火车票的旅客将会非常多，能买到一张火车票是每个旅客的愿望。中国从 2011 年开始实行网络售票，购买火车票的方式从只能到火车票售票口排队购票，逐步发展为可通过电话订票和网站订票等多种便利的途径。网络购票给人来了便利，旅客可以不出家门在网络上就能买到车票，售票窗口也不用那么繁忙，节省了大量的人力物力。网络售票给人带来便利的同时，也出现了不少问题。购票网站会出现包括登

录、购买、付款等各个环节的问题^[1]。为了保证网站更稳定的工作。本文将利用排队论对火车票购买网站优化提出建议。

2. 案例背景及现实问题

2.1 背景资料

网上购买火车票的简化流程为：登录网站：根据用户名和密码登录网站；查询余票：查找某趟列车的剩余车票；生成订单：锁定剩余车票中的一张作为购买的车票，根据车票信息和购票人信息生成支付订单；付款完成：车票购买完成；付款失败：车票回收继续等待预定。购买火车票的方式从只能到火车票售票口排队购票，逐步发展为可通过电话订票和网站订票等多种便利的途径。

网络购票给人们带来了便利。但到了春运，12306 网站面临庞大的购票需求。对火车票购买网站优化具有十分重要的意义。

2.2 需要解决的问题

经分析，网站订票的瓶颈可能是以下两方面的原因：

第一，网站并发问题，也就是同一时刻订票人数过多的问题。在同一时刻（例如 1 秒之间）访问网站的人数过多，服务器无法响应所有人的请求，导致无法登录、无法查询票车票等问题。在春节期间网站的访问量是非常大的为了缓解同一时间段内网站访问量过大的问题，网站采取了分时购票的方法，相当于分散了请求量，减轻了同一时间段并发访问过大的问题。

第二，唯一资源问题，也就是唯一的一张车票。所有来订票的人先要锁定一张车票，如果出现多人同时请求订购同一张票，那么系统就无法判断这张车票该给谁锁定，这样系统就会让请求重试。如果一直无法锁定车票，就会导致系统死锁、订票失败。为了应对车票这唯一资源的分配问题，网站又采取了排队的方法，即请求到来先获取一个号码等待排队，这样就避免了对车票直接造成死锁。获取一个号码，入队列的过程相对于处理一张车票的过程（包括锁定车票、生成订单、检测支付等一系列操作）是非常快速的。（这个过程可以和银行的操作流程对比，先获取一个号码排队等待处理，服务窗口是处理器，按照队列先进先出的顺序依次处理）。

我们解决下面以下问题：临近春节，订票网站需求激增，即使平台服务器每秒中能处理大量的数据，由于请求量过大都不可避免造成客户等待。因此，管理人员想要提高客户体验，客户需要等待的时间不超过 15%，此时需要确认已有的三台服务器能否满足需求，如果不能将如何改进^[2]。

3.研究目标与分析模型

3.1 研究目标

网站为了应对车票这唯一资源的分配问题，采取排队的方法，即请求到来先获取一个号码等待排队，这样就避免了对车票直接造成死锁。获取一个码，入队列的过程相对于处理一张车票的过程（包括锁定车票、生成订单、检测支付等一系列操作）是非常快速的。订票网站想要利用一种队列来满足现在的订票需要。

铁路车站售票窗口排队系统是典型的离散动态系统，由于每个旅客都存在确定的到达时间、开始服务时间和完成时间，因此可以用静态的思想来模拟售票窗口排队系统。根据第一问火车票网站每秒的最大处理速度，和系统的错误率的计算结果，以及网站的日累计访问量数据，本文依照现行的网站分时策略，采用基于的 $M/M/C/\infty/\infty/FCFS$ 排队模型进行求解。确定排队系统在多少服务台时能让系统中 75% 的客户不用等待^[3]。

4. 数据获取与统计分析

4.1 数据获取

4.1.1 模拟网站订票请求量

我们根据参考资料的 Alexa 的记录，统计出 2018 年 2 月 1 日至 16 日 12306 网站人均浏览页面量和日均 IP 量，统计的数据如下表所示：

表 1 网站日累计访问量

日期	人均浏览 页面数	日均 IP 量	日均 PV 量 (万)
2018/2/ 1	3.5	711200	248.92
2018/2/ 2	3.9	672000	262.08
2018/2/ 3	4.2	784000	329.28
2018/2/	3.7	1265600	468.27

4			
2018/2/5	3.7	1036000	383.32
2018/2/6	3.9	1192800	465.19
2018/2/7	3.8	1512000	574.56
2018/2/8	3.7	1411200	522.14
2018/2/9	3.7	1310400	484.85
2018/2/10	3.6	1528800	550.37
2018/2/11	3.5	1596000	558.60
2018/2/12	3.4	1456000	495.04
2018/2/13	3.8	1456000	553.28
2018/2/14	3.8	3416000	1298.08
2018/2/15	3.45	3528000	1217.16
2018/2/16	3.7	3864000	1429.68

其中, 日均 PV 量=人均浏览页面数 $\times$ 日均 IP 量。日均 IP 量代表每天访问 12306 网站的用户数, 日均 PV 量代表用户每天浏览 12306 网站页面的总数, 假设日均 PV 量为网站订票请求量。我们利用 15 天的数据求出平均每天的均 PV 量(万), 再根据服务器的处理能力可以计算出平均到达率为 $\lambda=35$, 服务率 $\mu=20$ 。

4.1.2. 网站分时策略对网站订票请求量的影响^[8]

分时购票策略解决集中式系统所存在的大用户量并发访问的瓶颈问题, 将访问的高峰分为多个高峰, 减少系统处理数据的压力。同时这种分时段的错开高峰放票的策略也把众多的访问人数分摊到各个时段。这样不仅缓解系统处理数据的压力, 减少人们恶意刷票的行为, 这样可以使购票更加理性, 还可以提高处理数据的效率, 会增加每天网站访问的 PV 量。但是, 由于现行铁路的运行量有限, 我们也不可能满足顾客无限的购票请求。我们无法获得每一个放票时间段 12306 网站访问量数据, 只有用每天的访问量来代替每天各个时间段网站访问的量。

4.2 统计分析

1. 假设 12306 网站排队服务机构模式为单队多服务台;
2. 假设 Alexa 的记录网站日累计访问量数据能够代表网站订票请求量;
3. 假设能以网站日累计访问量数据作为泊松分布检验的样本;
4. 假设卡方检验的显著性水平为 0.05;
5. 假设 12306 网站排队系统的最大容量为无穷大。

对于计算满足需求的排队个数, 我们先对进入系统购票的人数进行卡方检验, 发现购票人数符合泊松分布, 接着我们建立了 M/M/C/ ∞ /

∞ /FCFS 排队论模型，运用蒙特卡罗法模拟出进入网站购票的排队过程，最后计算出了排队的队列数。

计算需要多少队列可以满足要求是，建立 $M/M/C/\infty/\infty$ /FCFS 排队论模型，第一个 M 代表顾客进入系统服从的泊松分布^[5]，第二个 M 代表系统对单个顾客服务的时间服从负指数分布， C 代表系统中需要的队列来满足订票的需求， ∞ 代表排队系统的最大容量， ∞ 代表客源量，代表服务规则为先到先服务。运用管理科学家软件，得出系统中总的队列数^[4-5]。

5.模型求解过程与结论

5.1 模型设定- $M/M/C/\infty/\infty$ /FCFS 排队论模型与求解

5.1.1. 模型的原理

在春节期间，大家都有希望买到回家的火车票。在车票购买系统中，顾客希望等待的时间越短越好。但是，春运毕竟购买火车票的人太多，服务器无法承受如次大的访问量，官方通过在网上购票时强制加入排队过程，这样来缓解服务器的压力。这 and 实际过程中排队买票的过程类似，都属于排队论模型。顾客到达的时间和服务都是随机过程，而购票系统是一个随机服务系统。根据排队论系统的三要素对该服务系统作如下假设：

(1) 输入过程

进入系统的购票顾客：系统为有限资源排队系统，每天总的票数为 N 张。购票间是相互独立的，购票顾客进入系统也是相互独立的。

顾客到达方式：顾客达到时间间隔服从参数为 λ 的指数分布，即进入购

票系统的顾客单个、随机、独立的服从普阿松流。其中参数 $\lambda > 0$ 由泊松过程定义参数的意义为单位时间内平均进入系统的购票顾客为 λ 。

(2) 排队规则

当有购票需求的顾客进入购票系统，就将进行排队服务，排队服务的规则为先到先服务，即 *FCFS* 规则。

(3) 服务机构

系统容量为无限大。系统内有 3 个服务器，当有顾客进入购票系统时，先给购票顾客分配一个排队的号码，服务器随机将顾客随机插入队列中进行排队，接受服务器对购票请求的处理，各个服务器独立的并行。每个服务器每次只能处理一个购票的顾客。所以为服务机构单队列多服务台型。各个服务器服务的时间（单位时间能够处理的数据）服从 $\mu(> 0)$ 的负指数分布。

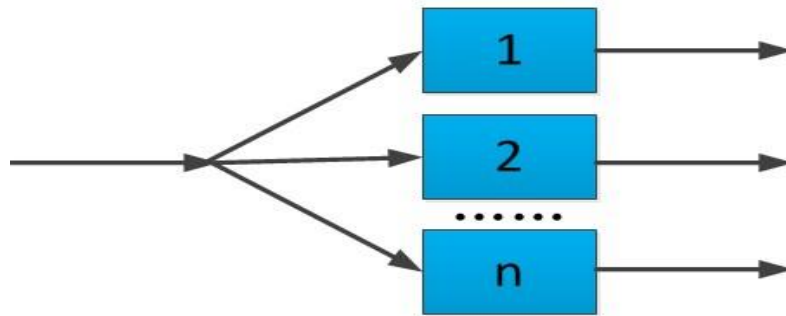


图 1 单队多服务台

从上面的假设我们建立的排队论模型为 $M/M/C/\infty/\infty/FCFS$ 排队论模型，第一个 M 代表顾客进入系统服从的泊松分布，第二个 M 代表系统对单个顾客服务的时间服从负指数分布， C 代表系统中需要的队列来

满足订票的需求, ∞ 代表排队系统的最大容量, ∞ 代表客源的数量, *FCFS* 代表服务规则为先到先服务^[6]。

2. 排队论模型

令 $X(t)$ 表示时刻 t 系统中顾客数 (即队长), 则 $\{X(t), t \in T\}$ 是状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上的生灭过程. 其中生率为: $\mu^*(1 - \beta_{\text{错误率}})$, $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$; 灭生率为:

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu', & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ n\mu', & k = n, n+1, \dots \end{cases}$$

(1) 平稳分布定理

令 $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu'}, \rho = \frac{\lambda}{n\mu'}, \mu' = P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = k\}, k \in E\{0, 1, 2, \dots\}$, 则当 $\rho < 1$, 该生灭过程有平稳分布且平稳分布为:

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} \rho_1^k P_0 = \frac{n^k}{k!} \rho^k P_0, & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{n^{k-n} n!} \rho_1^k P_0 = \frac{n^n}{n!} \rho^k P_0, & k = n, n+1 \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho_1^k}{k!} + \frac{n \rho_1^n}{n! (n - \rho_1)} \right]^{-1}$$

这里, P_0 表示系统空闲的概率。 $\rho < 1$ 为该生灭过程存在平稳分布的充要条件, 称 ρ 为系统服务强度。

(2) 主要指标

现在的购票系统里面有 n 个服务器, 所以顾客进入系统需要等待的概率为:

$$P_{\text{等}} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{1}{1-\rho} p, \rho = \frac{\lambda}{n\mu}, \rho < 1, \left(P_k = \frac{1}{k!} \rho^k P_0 \right)$$

系统内排队等候的顾客数均值平均等待队长:

$$\bar{L}_q = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) P_k = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \frac{1}{n^{k-n} n!} P_0 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_n$$

系统平衡时, 正在接受服务的顾客数值均值为:

$$\bar{L}_c = \sum_{i=0}^{n-1} k P_k + n \sum_{i=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \rho^k P_0 + \frac{P_0}{(n-1)!} \rho^n \sum_{i=0}^{\infty} \rho^k = \rho_1$$

L 为正在接受服务的顾客数与排队等待服务的顾客数之和, 即队长, $\bar{L}$ 为队长, 则其值为:

$$\bar{L} = \bar{L}_q + \bar{L}_c = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} P_n + \rho_1, \rho_n < 1$$

M/M/C 排队系统顾客排队等候服务时间均值即平均等待时间为:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho_1^n P_0}{\mu' (n-1)! (n-\rho_1)^2} = \frac{\rho_1^n P_0}{\mu' n \cdot n! (1-\rho)^2} \quad (8)$$

购票顾客在系统内平均逗留时间:

$$W_s = \frac{L}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + W_{\text{服}} = W_q + \frac{1}{\mu'}$$

5.2 模型求解

(1) 对进入系统购票的人数进行卡方检验

因为我们无法获得某天分时段有多少顾客进入系统购买火车票, 我们以网站日均 PV 量作为检验的总体样本代表个体样本来进行检验。检验的步骤如下^[7]:

Step1: 提出零假设

假设进入系统购票的人数服从泊松分布。

Step2: 选择检验统计量

选择 Pearson 卡方统计量。当 n 充分大时，它近似的服从自由度为 $k-1$ 的卡方分布 $\chi^2(k-1)$ ，其计算表达式如下所示：

$$\chi^2(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Step3: 计算统计量的观测值和概率 P 值。

如果卡方值较大，则说明观测频数分布与期望频数分布差距较大；反之，如果卡方值较小，说明观测值频数分布与期望频数分布接近。

Step4: 给出显著性水平 α ，做出决策

如果相伴概率 P 值小于显著性水平 α ，则拒绝原假设，认为样本来自总体服从理论分布；反之，认为样本来自总体分布与期望分布存在显著差异。

我们对进入系统购票的人数进行卡方检验，结果如下表所示：

表 2 卡方检验的结果

项目	日期
Chi-Square	3226.286
df	5
Asymp. Sig.	0

表 2 是卡方统计量及相应的相伴概率值，从计算的相伴概率值 Asymp. Sig. = 0.000 < 0.05, 则说明样本来自总体理论上服从泊松分布。

(2) 运用 MST (管理科学家软件) 对排队论模型有 n 位顾客的概率进行求解

当服务器为 3 时，结果如下：

主要指标	结果
THE PROBABILITY OF NO UNITS IN THE SYSTEM	0.1556
THE AVERAGE NUMBER OF NO UNITS IN THE WAITING LINE	0.4671
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE SYSTEM	2.2171
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE WAITING LINE	0.0133
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE SYSTEM	0.0633
THE PROBABILITY THAT AN ARRIVING UNIT HAS TO WAIT	0.3337

顾客人数	概率
0	0.1556
1	0.2724
2	0.2383

3	0.1390
4	0.0811
5	0.0473
6	0.0276
7	0.0161
8	0.0094
9	0.0055
10ormore	0.0077

当服务器为 4 时，结果如下：

主要指标	结果
THE PROBABILITY OF NO UNITS IN THE SYSTEM	0.1704
THE AVERAGE NUMBER OF NO UNITS IN THE WAITING LINE	0.0921
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE SYSTEM	1.8421
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE WAITING LINE	0.0026
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE SYSTEM	0.0526
THE PROBABILITY THAT AN ARRIVING UNIT HAS TO WAIT	0.1184

顾客人数	概率
0	0.1704
1	0.2982
2	0.2609
3	0.1522
4	0.0666
5	0.0291

5.3 结论

从以上结果我们可以得到，当服务器的数量为 3 时，顾客不得不等待的概率为 0.3337，系统中平均客户为 2.2171，等候线中平均时间为 0.0133，系统中的逗留时间 0.0633 虽然符合小于 0.5 的要求，但是顾客不得不等待的概率为 0.3337 不符合管理者 0.15 的要求，但我们的服务器增加到 4 时，顾客不得不等待的概率为 0.1184，系统中平均客户为 1.8421 符合小于 2 的要求，系统中逗留时间与等候线平均时间也符合小于 0.5 的要求，因此增加一台服务器能够达到管理者的要求。

6.政策建议

一、优化排队等待的时间，及时更新剩余票数

系统的处理能力不能够满足所有人购买火车票的需求，对顾客强制排队会有效地减缓系统处理的压力。但是，排队的强制时间为 30 分

钟时间太长，顾客又不能够通过系统及时查阅到目的地剩余的票数，这要等到排队时间结束，可能没有火车票。系统缩短排队的时间，及时更新目的地的剩余票数，顾客会根据实际情况选择是否排队，怎样排队，会使整个排队的队伍更加合理，减少恶意的刷新网站，降低系统压力。

二、合理运用分时策略，安排适当的服务器

分时购票策略解决集中式系统所存在的大用户量并发访问的瓶颈问题，将访问的高峰分为多个高峰，减少系统处理数据的压力。同时这种分时段的错开高峰放票的策略也把众多的访问人数分摊到各个时段。但是分时时段过多都是也会减低分时策略的优点，通过模拟系统的不断研究和抗压实验得出最好分时时段。如果系统过多的增加排队队伍，回增加服务器的台数，造成非忙期资源闲置，没有得到合理利用，如果服务器太少又不能满足广大用户的需求。合理考虑资源的利用效率，安排适当的服务器在系统中工作^[8]。

三、挺高用户满意度，做好预售和退票工作

提前订票的作用毋庸置疑，能减小网站的压力，达到分流的作用，用户也能更好的安排自己的出行计划。但今年的预售时间从以前的 12 天改为了 20 天，旅客出行时间变更的几率大大增加。许多旅客因为工作、生活等各种原因导致出行时间变更，被迫选择退票。同时，铁道部应该加强网上退票系统的建设，如果 12306 网站能够支持所有情况的退票的话，将大大提高用户体验，还能减少人力物力，提高退票效率。

四、从技术层面上，优化购票网站

1. 前端负载均衡
2. 引入云技术，加强网站建设
3. 减少网页大小增加带宽
4. 后端系统负载均衡
5. 异步、throttle 和批量处理

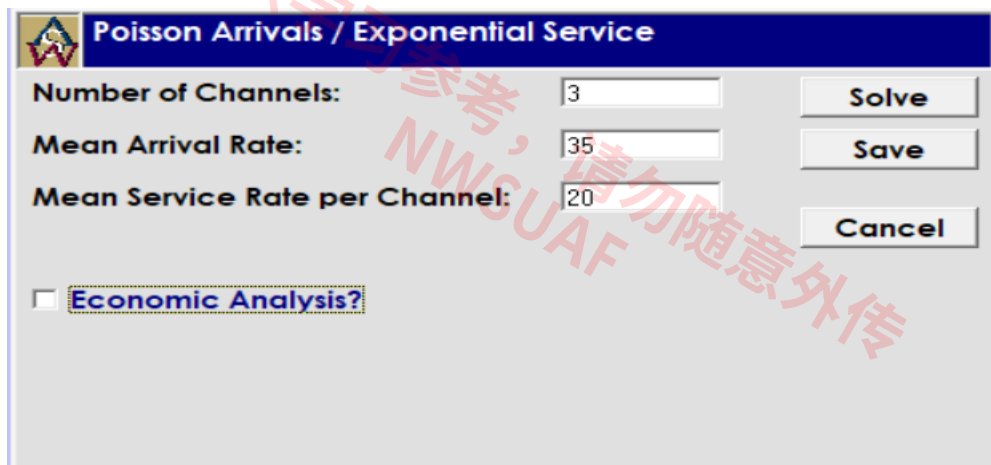
参考文献

- [1]陈磊,王鹏,董静宜,任超, 基于排队论的火车站售票排队系统的分析与研究[J]成都信息工程学院学报, 第 25 卷第 6 期:584-587. 2010。
- [2]杨欢, M/M/n 等待制排队模型在景区售票点的应用[J]科技论坛, 第 14 期. 113-114, 2009 年 4 月。
- [3]郑金忠, 陆四海, 基于排队论的航材可修件库存模型[J]. 物流技术, 2006 年 11 期。
- [4]佟岩. 多服务台单队列模型中用户等待时间的计算[A]. 第九届中国青年信息与管理学者大会论文集. 2007 年。

- [5]王海永. 单服务台有限队列模型的蒙特卡洛模拟[J]. 现代商业, 2010, (12):160-161.
- [6]陈学松, 曹炬, 方仍存. 视频点播系统中基于流行度的排队分析研究[J]. 计算机工程与科学. 2004 年 11 期.
- [7]邓寿年, 姜培华, 何 广. 基于 MATLAB 的多服务台排队系统的计算机模拟[A]. 安庆师范学院学报. 2011 年 8 月 03 期.
- [8]温录亮, 莫平, 彭俊浓, 蔡藩. 校园卡充值系统的建模与仿真[A]. 嘉应学院学报. 2012 年 5 月 05 期.

附录

当服务器等于 3 时，排队模型 MS 求解如下：



Poisson Arrivals / Exponential Service

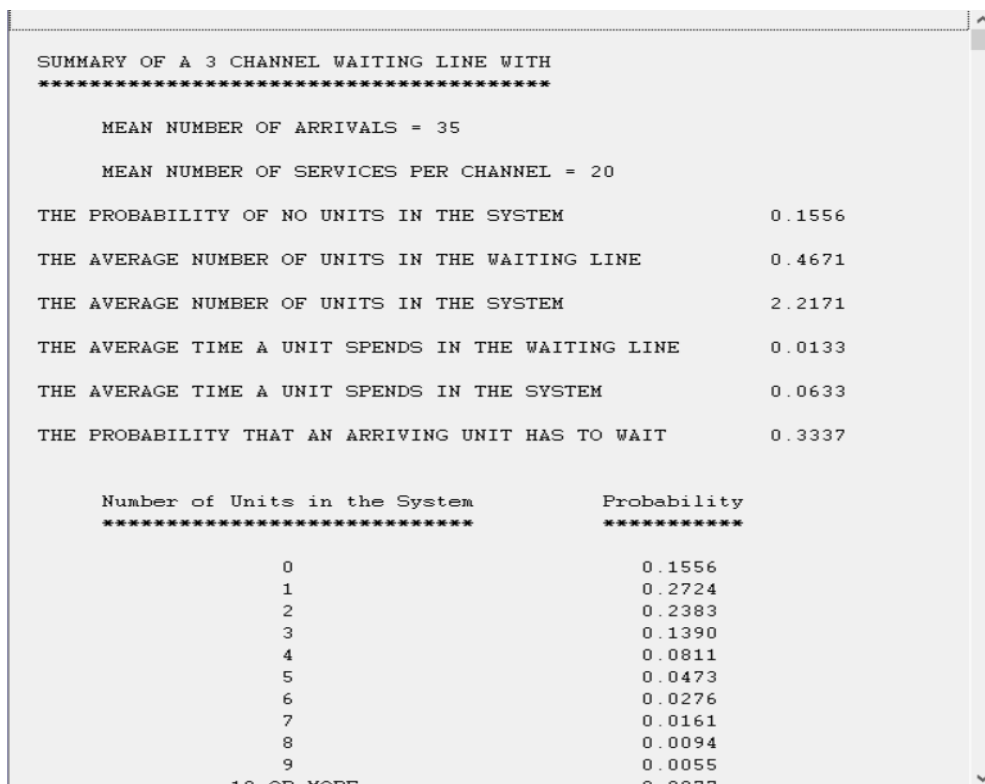
Number of Channels: 3

Mean Arrival Rate: 35

Mean Service Rate per Channel: 20

☐ Economic Analysis?

Solve Save Cancel



SUMMARY OF A 3 CHANNEL WAITING LINE WITH

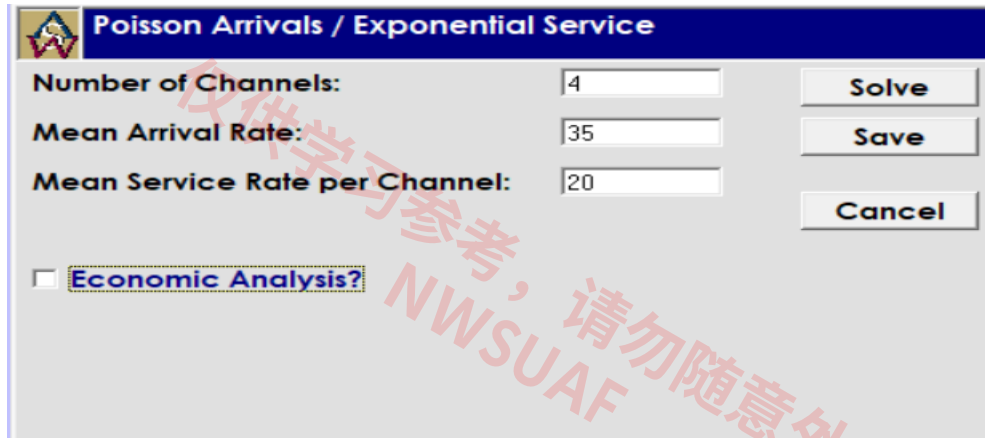
MEAN NUMBER OF ARRIVALS = 35

MEAN NUMBER OF SERVICES PER CHANNEL = 20

THE PROBABILITY OF NO UNITS IN THE SYSTEM	0.1556
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE WAITING LINE	0.4671
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE SYSTEM	2.2171
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE WAITING LINE	0.0133
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE SYSTEM	0.0633
THE PROBABILITY THAT AN ARRIVING UNIT HAS TO WAIT	0.3337

Number of Units in the System	Probability
*****	*****
0	0.1556
1	0.2724
2	0.2383
3	0.1390
4	0.0811
5	0.0473
6	0.0276
7	0.0161
8	0.0094
9	0.0055
10 OR MORE	0.0027

当服务器等于 4 时，MS 求解如下：



Poisson Arrivals / Exponential Service

Number of Channels: 4 **Solve**

Mean Arrival Rate: 35 **Save**

Mean Service Rate per Channel: 20 **Cancel**

☐ **Economic Analysis?**

SUMMARY OF A 4 CHANNEL WAITING LINE WITH

MEAN NUMBER OF ARRIVALS = 35

MEAN NUMBER OF SERVICES PER CHANNEL = 20

THE PROBABILITY OF NO UNITS IN THE SYSTEM	0.1704
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE WAITING LINE	0.0921
THE AVERAGE NUMBER OF UNITS IN THE SYSTEM	1.8421
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE WAITING LINE	0.0026
THE AVERAGE TIME A UNIT SPENDS IN THE SYSTEM	0.0526
THE PROBABILITY THAT AN ARRIVING UNIT HAS TO WAIT	0.1184

Number of Units in the System *****	Probability *****
0	0.1704
1	0.2982
2	0.2609
3	0.1522
4	0.0666
5	0.0291