物流公司在货物运输中的安排及优化分析

摘要（Abstract）：

本文主要针对陕西传递者物流有限责任公司（以下简称"物流公司"）在承接某产品从产地到销售地运输过程中，如何以更小的成本获得最大的利润，这就要求物流公司对各地区需求的货物量、以及各仓库的存货物、各线路的运费、运力等情况做详细的分析，然后拟定详细的运输计划；本模型提供一个物流公司如何调配资源进行货物运输而获取最大利润的最优化问题。

关键词（Key Words）： 运输问题 产销不平衡 表上作业法

一、公司背景

陕西传递者速运有限公司，成立于 2000 年 4 月，注册资本为 1000 万人民币，法定代表人为杨航，注册地址为陕西省西安市高新区锦业一路 81 号，经营范围包括普通货物运输；物流信息的咨询服务；货物仓储（危险品除外）；货运代理。截至目前，公司共有 5 个物流中心集中点，总部有班子成员 8 人、管理岗员工 42 人，各物流中心集中点（以下简称"项目办"）分别有办公室管理人员 5 人、物流专员 35 人、装卸及其他一线工人 120 人。

二、案例背景及现实问题

（一）案例背景

近期，物流公司与 A 公司签订了一笔业务，具体为：为庆祝公司成立 20 周年，感谢老员工及其家属们对公司一直以来的拼搏和支持，A 公司拟为分布在各地的项目办员工发放感恩节礼。感恩节礼选取了蔬果礼盒，由榴莲、莲雾、香瓜、板栗薯等高端蔬果组成。考虑到蔬菜、果子的新鲜，物流公司采用了多仓发货的模式。基于 A 公司属于物流公司长期合作对象，在保证服务质量的同时，物流公司决定选用最优化运输模式，以期达到成本最低、利润空间最大的效果。

（二）原始题目

有四个项目办（D1/D2/D3/D4）需要配送蔬果礼盒，欲从三个产地（中间仓库）（O1/O2/O3）调运，各项目需求的货物量、以及各产地的存货物，见下表：

表1 各项目办需求的货物量及各产地的存货物一览表（单位：1吨）

销地 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	4	3	2	5
O_2	10	3	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
b_j	1	6	2	6	15

表2 各项目办需求的货物量及各产地的存货物一览表（单位：千元/吨）

销地 / 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	4	3	2	5
O_2	10	3	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
b_j	1	6	2	6	15

表3 运力一览表

销地 / 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	4	3	2	5
O_2	10	3	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
b_j	1	6	2	6	15

问题：如何运输才能保证在最小费用的情况下，将所需高端蔬果礼盒从各地仓库运往各项目办？

（三）问题分析

运输运价的构成，包括发到基价、运行基价构成、货物运输杂费，其中：

零担货物年车运价=每吨运价×计费重量

整车货物每吨运价=发到基价+运行基价×运价里程

集装箱货物每箱运价=发到基价+运行基价×运价里程

本题需要达到运输成本最小、利润空间最大的效果，即应设计模型，使得运价与计费重量、里程统筹计算后，得到最优解。

三、模型的建立

（一）模型假设

1.假设运输过程中高端蔬果价格没有变化；

2.假设公司预计的蔬果需求量即为实际销售量；

3.假设各个项目办高端蔬果产地的单位量的实际进价和销售价与预测价几乎符合；

4.假设在该时期内管理费用大约不变；

5.假设高端蔬果的好坏程度不在该问题中考虑。

（二）定义与符号说明

运输问题本质上是一类特殊的线性规划问题，是线性规划在运输领域中的应用，所以其求解方法——表上作业法的本质是单纯形法。运输模型的特殊性体现在一般有大量的约束条件和变量（取决于运输起点和终点的数量），但在约束条件中大多数的变量的系数为0，从运输起点和终点运输数量相等（产销平衡）的角度来看，这些约束条件之间是有关系的。一般运输问题解决的是：如何把货物从生产地（产地）运到销售地（销地）使运费最小。此外，运输问题的一般模型对供给和需求有一个假设：每一个产地的产量和每一个销地的销量都是固定的，且产地的所有货物

都要运往销地，销地的所有货物都是从产地运来的，即产销平衡。这个假设意味着所有产地的供给之和与所有销地的需求之和相等。为了能按照上述思路求解运输问题，要求每步得到的解X=(xij)都必须是其基可行解，这意味着：

1.解X必须满足模型中的所有约束条件；

2.基变量对应的约束方程组的系数列向量线性无关；

3.解中非基变量的个数不能大于(m+n-1)个，原因是运输问题虽有(m+n)个结构约束条件，但是由于总产量等于总销量，故只有(m+n-1)个结构约束条件是线性独立的；

4.为使迭代顺利进行，基变量的个数在迭代过程中应该始终保持为(m+n-1)个。因为可以证明(m+n-1)基变量所对应的约束方程的系数列向量线性无关。

本文中，会经常使用如下表格描述问题：

销地 产地	B_1	……	B_n	产量
A_1	c_{11}	……	c_{1n}	s_1
……	……	……	……	……
A_m	c_{m1}	……	c_{mn}	s_m
销量	d_1	……	d_n	

本文中，相关符号标识含义，具体如下所示：

A_1，A_2，…, A_m表示货物的 m 个生产地或运输的出发地；

B_1，B_2，…, B_n表示货物的 n 个销售地或运输的目的地；

s_i表示产地A_i的产量；

d_j表示销地B_j的销量；

C_{ij}表示从产地A_i运到销地B_j的单位运价。

（三）模型建立

针对于本论文中提到的问题而言，我们可以建立如下模型：

假设从产地运到销地的运输量是x_{ij}，那么 m 个产地 n 个销地的运输模型的数学描述如下：

目标函数：$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

约束条件：$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i\,, i = 1,2, \ldots, m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$,j=1,2,…,n

$x_{ij} \geq 0$

该模型共有 m*n 个决策变量，如果不管非负约束，运输模型共有 m+n 个等式约束条件，这些约束条件中变量的系数是一个大多数元素为 0 的（m*n）维的方阵，并且呈现一种特殊的矩阵结构：

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
$$

如果一个线性规划模型的约束条件符合这种特殊结构，就可以用运输模型来解决，不用纠结是否是运输问题[1]。

四、模型求解

（一）数据获取与统计分析

为了方便，将产销平衡与费用表拆成出行费用与运量分配表。

销地 / 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	4	3	2	5
O_2	10	3	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
b_j	1	6	2	6	15

首先我们将其拆成 2 个表格，即运输费用表与运量分配表。

销地 / 产地	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	4	4	3	2
O_2	10	3	4	7
O_3	9	9	8	4

销地 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1					5
O_2					5
O_3					5
b_j	1	6	2	6	15

从出行费用表的最左上角（西北角）的格子开始。让产地O_1的物资尽可能多地运往销地D_1。

销地 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	1				5
O_2	0				5
O_3	0				5
b_j	1	6	2	6	15

由于销地D_1需要的物资总量只有 1，而产地O_1要求运出的物资总量为 5，所以O_1要运出的物资总量中 1 个单位运至D_1，即$x_{11}=1$，将此运量 1 填入运量分配表

的（O_1, D_1）格子。这时销地D_1物资需求量已经满足，不再需要其他任何产地运来物资，由平衡条件得$x_{21}=0$，$x_{31}=0$。即

销地 产地	*D₁*	*D₂*	*D₃*	*D₄*	aᵢ
O₁	1	4	0	0	***5***
O₂	0				***5***
O₃	0				***5***
bⱼ	***1***	***6***	***2***	***6***	***15***

接下来，从出行费用表当前的最左上角（西北角）的格子（O_1，D_2）开始。让产地O_1的物资尽可能多地运往销地D_2。由于销地D_2需要的物资总量为 6，而产地O_1当前能运出的物资总量为 4，所以O_1能运出的物资总量中 4 个单位运至D_2，即$x_{12}=4$，将此运量 4 填入运量分配表的（O_1，D_2）格子。这时产地O_1物资运出量已经满足，不能再向其他任何销地运送物资，由平衡条件得$x_{13}=0$，$x_{14}=0$。

而后，从出行费用表当前的最左上角（西北角）的格子（O_2，D_2）开始。让产地O_2的物资尽可能多地运往销地D_2。由于当前销地D_2需要的物资总量只有 2，而产地O_2要求运出的物资总量为 5，所以O_2要运出的物资总量中 2 个单位运至O_2，即$x_{22}=2$，将此运量 2 填入运量分配表的（O_2，D_2）格子。这时销地D_2物资需求量已经满足，不再需要其他任何产地运来物资，由平衡条件得$x_{32}=0$。

与上一个步骤相同，从出行费用表当前的最左上角（西北角）的格子（O_2，D_3）开始。让产地O_2的物资尽可能多地运往销地D_3。由于当前销地D_3需要的物资

总量只有 2，而产地O_2要求运出的物资总量为 5，所以O_2要运出的物资总量中 2 个单位运至D_3，即$x_{23}=2$，将此运量 2 填入运量分配表的（O_2, D_3）格子。由平衡条件得$x_{43}=0$， $x_{24}=1$，$x_{34}=5$。即

销地 / 产地	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	1	4	0	0	5
O_2	0	2	2	1	5
O_3	0	0	0	5	5
b_j	1	6	2	6	15

这样，可以得出一组可行运输方案。运输费用为：

S=1×4+4×4+2×3+2×4+1×7+5×4=61

（二）其他算法讨论

1.表上作业法

当采用一般单纯形法求解运输问题时，应去掉一个多余的约束等式，任何一个约束等式均可。但运输问题是的特殊性，人们将单纯性法简化用表格来处理，采用表上作业法求解时，因为在运输表上进行，不必写出上述的数学模型。

运输问题解的每一个分量，都唯一对应其运输表中的一个格。得出运输问题的一个基可行解后，就将即便基变量的值 xij 填入运输表相应的格子(Ai,Bj)内，并将这种格子称为填有数字的格，含填数字 0 的格，这时的解为退化解，退化需要补 0；对非基变量对应的格不填入数字，称为空格。

表上作业法是求解运输问题的一种简便而有效的方法，其求解工作在运输表上进行，它是一种迭代法，可以满足上述的要求，迭代步骤为：先按照某种规则找出一个初始调运方案；再对现行解做最优性判别；若这个解不是最优解，就在运输表上对它进行调整改进，得出一个新的解；再判别，再改进；直到得到运输问题的最优解为止[2]。

（1）最小元素法

最小元素法是依次从单位运价表中逐次挑选最小元素，安排运量 $\min\{a_i，b_j\}$，之后划去该元素所在行或列。当产大于销时，划去该元素所在列；当产小于销时，划去该元素所在行。

首先查找表中费用最小的的元素，是（A_1, B_3），根据产地与销地的信息，A_1的产量为 5，B_3的销量为 1，故其运量最大为 1，因此在表格的左上方标注该格子的运量为 1；当产大于销时，划去该元素所在列，如下表所示：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	2	5	5
A_2	7	5	8	4	2
A_3	3	2	9	7	3
销量	2	3	1	4	

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	1	5	5
A_2	7	5	8	4	2
A_3	3	2	9	7	3
销量	2	3	1	4	

接下来寻找余下表格中的最低运费，是（A_3,B_2），根据产地与销地的信息，A_3的产量为 3，B_2的销量也为 3，故其运量最大为 3，因此在表格的左上方标注该格子的运量为 3；当产等于销时，划去该元素所在行和列，如下表所示：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	1	5	5
A_2	7	5	8	4	2
A_3	3	3	9	7	3
销量	2	3	1	4	

接下来寻找余下表格中的最低运费，为（A_2,B_4），根据产地与销地的信息，A_2的产量为 2，B_4的销量为 4，故其运量最大为 2，因此在表格的左上方标注该格子的运量为 2；当产小于销时，划去该元素所在行，如下表所示：

西北

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	1	5	5
A_2	7	5	8	2	2
A_3	3	3	9	7	3
销量	2	3	1	4	

根据产销平衡，（A_1,B_4）的运量为 4−2=2，再次根据产销平衡，（A_1,B_1）的运量为 4−2=2，至此，运量安排完毕，如下表所示：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2	3	1	2	5
A_2	7	5	8	2	2
A_3	3	3	9	7	3
销量	2	3	1	4	

$x_{11} = 2, x_{13} = 1, x_{14} = 2, x_{24} = 2, x_{31} = 0, x_{32} = 3$，初始运费 Z=38。

以上即为最小元素法寻找初始基可行解的全部过程。当然与西北角法一样，这只是针对本问题的一组可行解，并非最优解。

（2）位势法

位势法，也称为对偶变量法。定义：$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + u_j)$

其中c_{ij}为从产地O_i到销地D_i的运输费用，u_i和u_j分别代表产地O 和销地D_j的位势量。在表上作业法中，运量为 0 的格子均为非基变量，分别计算每个非基变量对应的δ_{ij}，当所有非基变量对应的δ_{ij}均为非负时，该方案即为最优解。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6 **2**	3	2 **1**	5 **2**	5
A_2	7	5	8	4 **2**	2
A_3	3 **0**	2 **3**	9	7	3
销量	2	3	1	4	

表格中红色字为运费，黑色加粗的字为运量，也即基变量对应的格子，其余格子对应着非基变量。下面我们分别计算各个非基变量对应的δ_{ij}值。

定义基变量对应的δ_{ij}值为 0，即且令

$$u_1 = 0$$

所以有

$$v_3 = 5$$

如下表所示。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	6 **2**	3	2 **1**	5 **2**	5	0
A_2	7	5	8	4 **2**	**2**	
A_3	3 **0**	2 **3**	9	7	3	
销量	2	3	1	4		
	6		2	5		

而由于

$$c_{24} = 4$$

故

$$c_{31} = 3$$

故

$$u_3 = -3$$

从而推出

$$v_2 = 5$$

如下表所示。至此，每行与每列的位势全部计算完毕。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	6 **2**	3	2 **1**	5 **2**	5	0
A_2	7	5	8	4 **2**	2	-1
A_3	3 **0**	2 **3**	9	7	3	-3
销量	2	3	1	4		
	6	5	2	5		

据上表计算的结果，表明让非基变量x_{12}从 0 增到 1，可使总运费减少 2 个单位。因此本方案并非最优方案。

2.闭合路调整法

首先，找到对应值最小的非基变量，即x_{12}，令其作为进基变量，通过闭回路法调整其他基变量的值以达到产销平衡。通过闭回路法调整基变量值，与通过闭回路法求检验数类似，方法如下：

1、首先以进基变量所在格为始点和终点，做出唯一的一条其余顶点均为基变量的封闭回路；

2、其中每到达一个顶点时，前进方向转 90°；

3、画好闭回路后，令起点为偶数点，依次奇偶相间标注；偶点标“+”号，表示运量需要增加；奇点标“-”号，表示运量需要减少；

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6 **2**	3	2 **1**	5 **2**	5
A_2	7	5	8	4 **2**	2
A_3	3 **0**	2 **3**	9	7	3
销量	2	3	1	4	

4、调整量即为所有奇数点位置的运量最小值，该点对应的基变量离基，所有偶数点的运量都加上调整量，所有奇数点的运量都减去调整量，调整完成。回到在本题，进基变量为 $x12$，可以做出唯一的闭回路，并标记好正负号[3]。

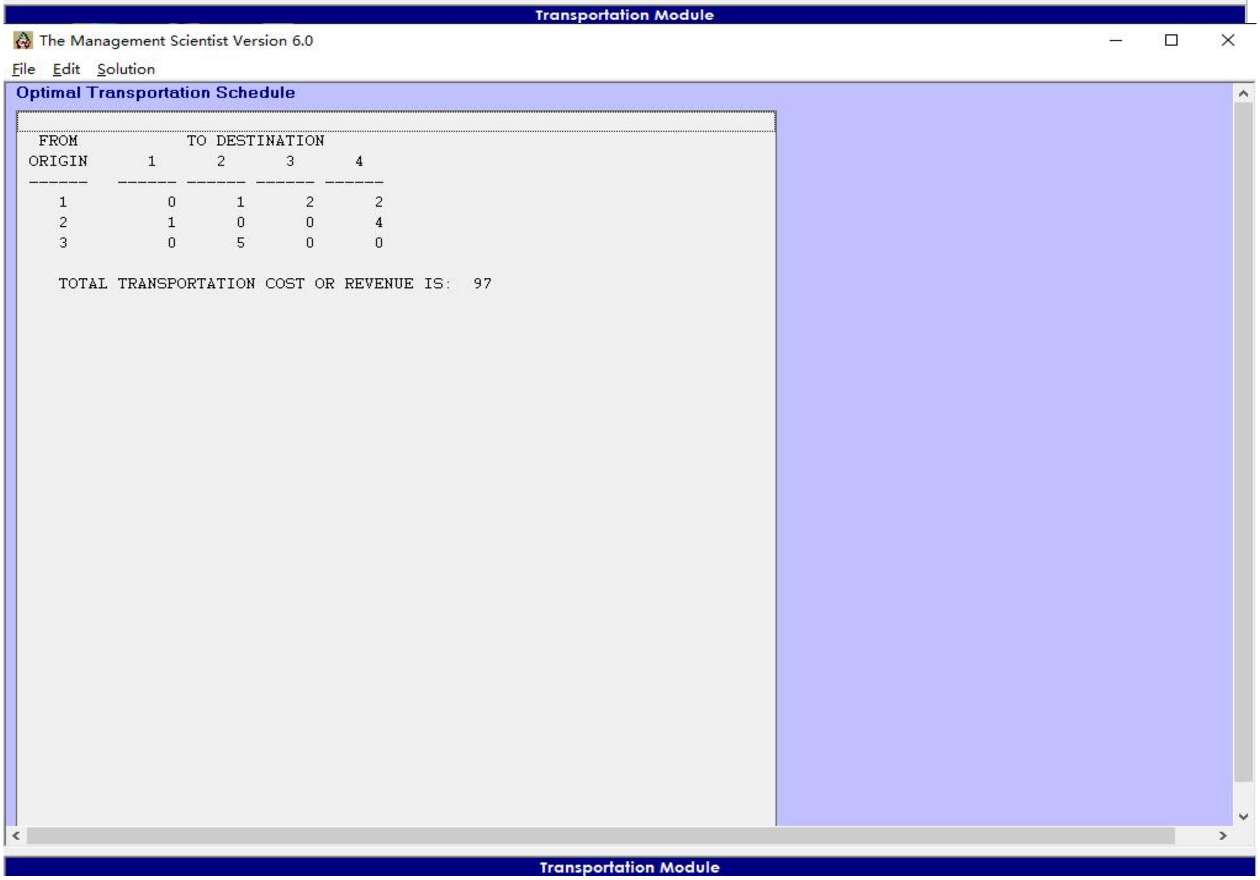
根据计算结果，奇数点最小运量为 2，对应的基变量x_{11}离基。所有偶数点的运量都加上 2，所有奇数点的运量都减去 2，得到新的运输方案

此时基可行解为：$x_{12}=2$，$x_{13}=1$,$x_{14}=2$，$x_{24}=2$,$x_{31}=2$，$x_{32}=1$，$Z=34$。

经过计算，所有的非基变量的值均为正，方案为最优方案。当非基变量的值仍存在负数时，应继续调整，直至所有的非基变量的值全部为正。

（三）模型计算

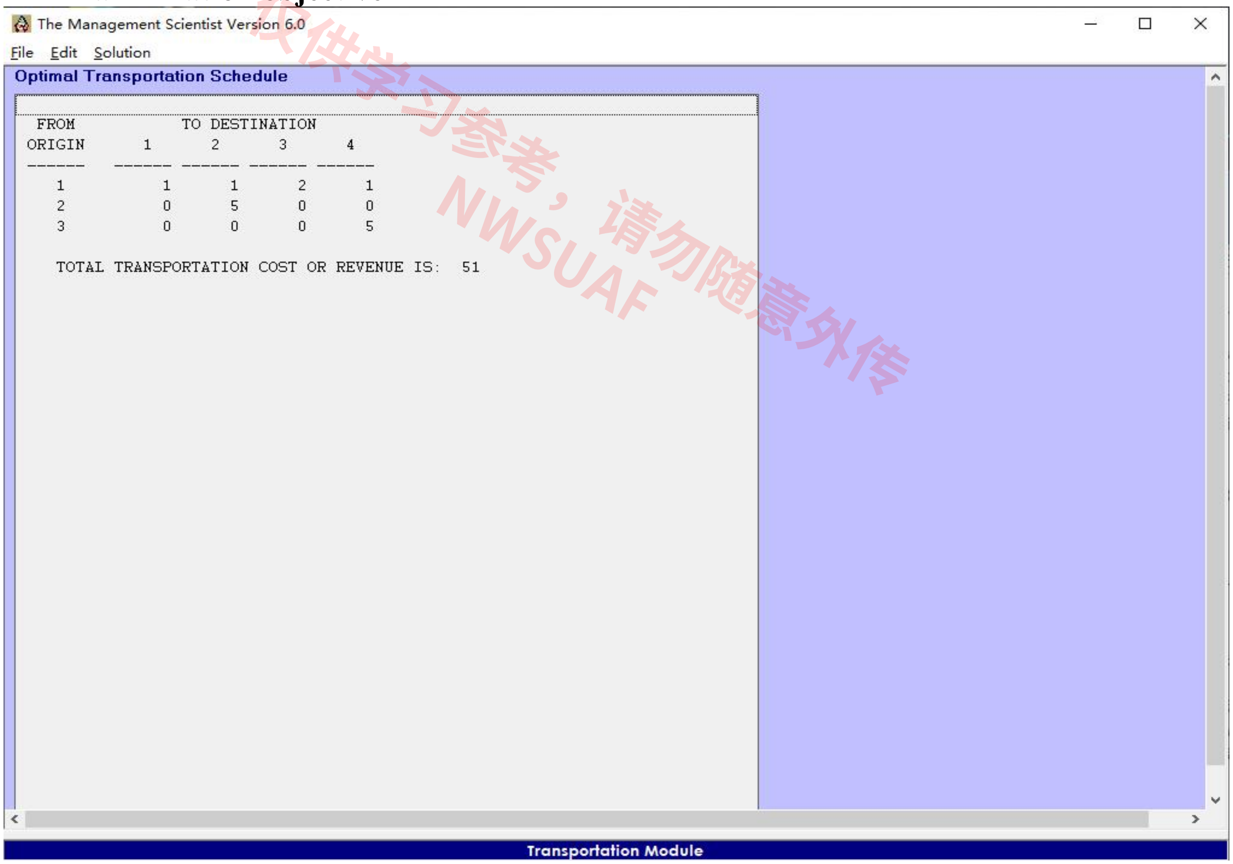
	Destination				
Origin	1	2	3	4	Supply
1	4	4	3	2	5
2	10	3	4	7	5
3	9	9	8	4	5
Demand	1	6	2	6	



FROM ORIGIN	TO DESTINATION 1	2	3	4
1	0	1	2	2
2	1	0	0	4
3	0	5	0	0

TOTAL TRANSPORTATION COST OR REVENUE IS: 97

maximization objective



minimization objective

通过模型计算，可达到以下运输方案：

O_1要运出高端蔬果礼盒 1 吨运至D_1，O_1运出高端蔬果礼盒 1 吨运至D_2，O_1运出高端蔬果礼盒 2 吨运至D_3，O_1运出高端蔬果礼盒 1 吨运至D_4；O_2要运出高端蔬果礼盒 5 吨运至D_2；O_3要运出高端蔬果礼盒 5 吨运至D_4；

费用 S=1x4+1x4+2x3+1x2+5x3+5x4=51

则该方案可以将各产地的货物运输到各销售地，此时的最小费用为 5.1 万元，该费用为本题的一组可行解，也是最优解。即成本最小、利润空间最大。

五、政策建议

在实际应用中，运输过程中会受到一些其他约束的影响，譬如运输线路的运输能力有限制，这时候只需要在约束条件中加上相应的约束就可以了，其实就转变成了一般的线性规划问题，运输模型的求解方法不适用。同样的，在运输过程中，也可能追求的目标不是运费最小，可以是利润最大化的问题，这时也可以把其看成一般的线性规划问题来建模和求解就可以了。

（一）模型优点

1.本文得出的结果的数据具有很好的参考性；

2.本文使用的方法简单，不管是市场上价格敏感，还是市场的销售市场变动，都有很好的通用性；

3.本文所使用的方法涉及到的变量少，且本文的变量都为一类，更能容易理解。

（二）模型缺点

1.本文没有存在一定的风险系数来预防这个问题，而是建立一个理想的模型来解决问题；

2.在假设时是假设公司资金不存在流动问题，但是一个公司在一段时间中资金流动不能确保。

（三）模型推广

面对现在高速发展的市场经济，企业的各种经营方式已经成为现代经营主流，但随着物流的高速发展以及迅速变化的市场经济环境，对企业的考验越来越大。作为一家物流企业，如何在激烈的竞争和信息化社会中，获得长久的发展，直接跟企业如何制定运输生产计划有着不可分离的关系。与此同时随着经济的增长，经营方法越来越多也越来越合理，合理的制定经营计划也是在这个浩瀚的市场中获得更大

的利润。

因此本文以物流公司高端蔬果运输为例，使得该公司能够以最小成本、获得更大的利润。通过建立相关的线性优化模型求解出最终的结果，并对求解到的数据，结合实际进行了详细的分析。本文使用的研究方法为线性优化，具有很强的通用性，同时在研究中考虑的因素比较全面，对于类似的运输问题研究不需要过多的修改就可以运用本文的模型进行求解生产最大利润，并且对于不同类型的企业也只有对相应的约束条件进行适当的修改，同样也可以进行生产方案的制定及最大利润的求解，因此本文具有很强的借鉴意义。

参考文献

1.Adaji I, Lawal A, Abdullahi A, Abdulkadir A. Performance Evaluation of Outpatient Department Waiting Line System in a City Hospital in Nigeria[J]. Journal of Applied Sciences and Environmental Management, 2020, 25(1): 65–70.

2.刘小寒,马晓磊, 刘钲可. 面向公共交通的电动自动驾驶模块车调度优化[J]. 中国公路学报, 2022, 35(3): 240.

3.戴维安德森, 侯文华(译), 杨静蕾(译). 数据、模型与决策: 管理科学篇[M]. Fourteenth 版. 北京: 机械工业出版社, 2018.